Interrogation n°5 — Corrigé (sujet A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit E un ensemble muni d'une l.c.i. $\top$. Quelles propriétés supplémentaires faut-il vérifier pour que $(E, \top)$ soit un groupe ? On les écrira en termes de quantificateurs.

Cf cours.

2) Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. On note e et e' les éléments neutres respectifs de G et G'. Donner la définition (ensembliste) du noyau de f, noté $\mathrm{Ker} f$.

Cf cours.

3) On pose $H = \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que H est un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$.

Il est clair que $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

- Montrons que $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in H$. La fonction $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ est définie par $1_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 1$, cette fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}$.
- Soit $f, g \in H$. Montrons que $f - g \in H$. Comme f, g sont continues, leur différence est également continue. D'où $f - g \in H$.
- Soit $f, g \in H$. Montrons que $fg \in H$. Comme f, g sont continues, leur produit est également continu. D'où $fg \in H$.

Ainsi, H est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Interrogation n°5 — Corrigé (sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1) Soit $(A,+,\times)$ est un anneau et $a \in A$. Sous quelle condition peut-on dire que a est inversible (on répondra en termes de quantificateurs) ? Quelle structure algébrique particulière possède l'ensemble des éléments inversibles de A ?

Cf cours.

2) Soit $(G,\cdot)$ un groupe et $a,b,c \in G$. Simplifier l'expression $(a^{-1}bc)^{-1}a$.

$(a^{-1}bc)^{-1}a = (bc)^{-1}(a^{-1})^{-1}a = c^{-1}b^{-1}aa = c^{-1}b^{-1}a^2$

3) Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

On a $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{C}^*$ par définition.

- L'élément neutre de $(\mathbb{C}^*,\times)$ est 1. Montrons que $1 \in \mathbb{U}_n$. On a bien $1 \in \mathbb{C}^*$ et $1^n = 1$. D'où $1 \in \mathbb{U}_n$.
- Soit $u,v \in \mathbb{U}_n$. Montrons que $uv \in \mathbb{U}_n$. Comme $u,v \in \mathbb{C}^*$, on a aussi $uv \in \mathbb{C}^*$ et $(uv)^n = u^n v^n = 1 \times 1 = 1$. Ainsi $uv \in \mathbb{U}_n$.
- Soit $u,v \in \mathbb{U}_n$. Montrons que $u^{-1} = \dfrac{1}{u} \in \mathbb{U}_n$. Comme $u \in \mathbb{C}^*$, on a aussi $\dfrac{1}{u} \in \mathbb{C}^*$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)^n = \dfrac{1}{u^n} = \dfrac{1}{1} = 1$. Ainsi $u^{-1} \in \mathbb{U}_n$.

Finalement, $\mathbb{U}_n$ est bien un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.